Aula Erros Estatísticos

Curso Remoto FisExpI

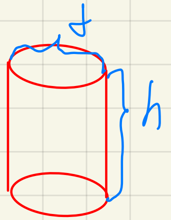
Fabricio Toscano

Prof. Associado do Instituto de Física da UFRJ.

- Cada medição prática acarreta um grau de incerteza em seu resultado.
- Em outras palavras, a incerteza é parte integrante de todas as medidas.
- A habilidade de avaliar a incerteza de medição é fundamental tanto na pesquisa científica, para estabelecer os limites de validade das teorias, quanto nas aplicações tecnológicas, para avaliar a confiabilidade de produtos e procedimentos.

Tipos de Medidas:

- **Medidas diretas:** As grandezas das medidas diretas são determinadas diretamente com um instrumento de medida. Exemplos: i) o comprimento de uma mesa feito com uma régua.
  ii) tempo de queda de um objeto feito com um cronômetro
- **Medidas Indiretas:** As grandezas das medidas indiretas são determinadas a partir de medidas diretas de outras grandezas. Exemplos: i) o volume $V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h$ de um cilindro

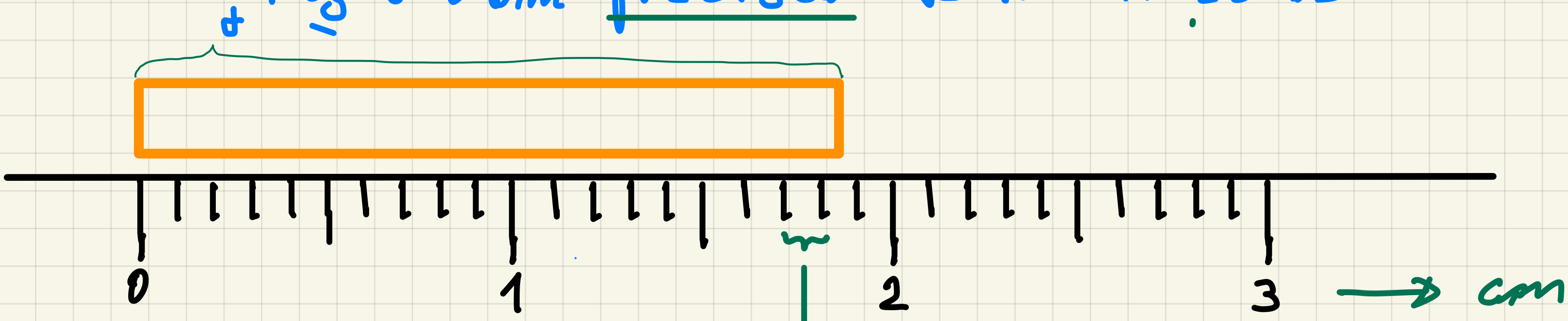


d = diâmetro do cilindro (paquímetro)
h = altura do cilindro (régua).

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

- Incertezas das medidas diretas: Associada à variação mínima que o instrumento pode detectar

Exemplo: Régua com precisão de milímetros



0,1 cm = 1 mm

Foi escolhido mas poderia ser um 7 ou 6 !!!

$d = (1{,}85 \pm 0{,}05)$ cm

é razoável escolher a incerteza como a metade da precisão do instrumento.

no caso par ser um instrumento analógico !!!

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

3

- Incertezas das medidas indiretas:

Se calculam com propagação de erros a partir das medidas diretas e suas incertezas!

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_N$ grandezas independentes medidas de forma direta.

grandeza que se quer determinar!

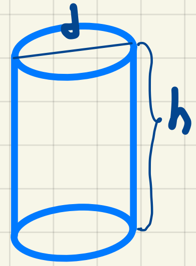
$$F = \Big(F(\underbrace{\overbrace{x_1, \ldots, x_N}^{*}}_{\text{resultados concretos das medidas diretas}}) \pm \delta F \Big) \text{ unidade}$$

propagação de erros!

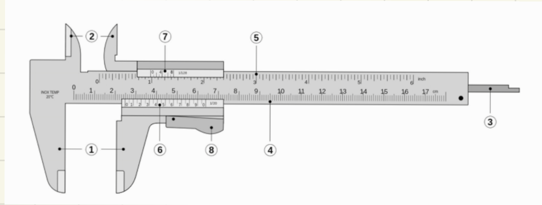
$$\delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_{*}\right)^2 \delta x_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\Big|_{*}\right)^2 \delta x_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_N}\Big|_{*}\right)^2 \delta x_N^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\Big|_{*}\right)^2 \delta x_j^2}$$

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

Exemplo: $V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h \rightarrow$ volume de um cilindro



$d = (0{,}98 \pm \underbrace{0{,}01}_{\delta d})\ \text{cm} \rightarrow$ medida usando o paquímetro $\rightarrow$



$h = (12{,}00 \pm \underbrace{0{,}05}_{\delta h})\ \text{cm} \rightarrow$ medida usando uma régua

$$V = \pi \left(\frac{0{,}98}{2}\right)^2 12 = 9{,}0515\ldots$$ } número sem arredondamento

Precisa estimar a incerteza δV para poder arredondar!

$$\left.\frac{\partial V}{\partial d}\right|_{(d,h)} = \left.\left(\frac{\pi}{2}\, d\, h\right)\right|_{(d,h)} = \frac{\pi}{2}\, 0{,}98\ \ 12 = 18{,}4725\ldots$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial h}\right|_{(d,h)} = \left.\left(\frac{\pi}{4}\, d^2\right)\right|_{(d,h)} = \frac{\pi}{4}(0{,}98)^2 = 0{,}7542\ldots$$

$$\delta V = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial V}{\partial d}\right|_{(d,h)}\right)^2 (\delta d)^2 + \left(\left.\frac{\partial V}{\partial h}\right|_{(d,h)}\right)^2 (\delta h)^2} = \sqrt{(18{,}4725\ldots)^2 (0{,}01)^2 + (0{,}7542\ldots)^2 (0{,}05)^2} = 0{,}1885\ldots \approx 0{,}19$$

$\uparrow$ arredondando!

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

Resultado final $\boxed{V = (9{,}05 \pm 0{,}19)\,cm^3}$ → usando 2 casas decimais significativos

5

$\boxed{V = (9{,}1 \pm 0{,}2)\ cm^3}$ → usando 1 casa decimal significativa

Notar que

Incerteza relativa da medida de "V"

$$\left(\frac{\delta V}{V}\right) = \sqrt{4\left(\frac{\delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2} = \sqrt{4\left(\frac{0{,}01}{0{,}98}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{12}\right)^2} \approx 2\ \frac{0{,}01}{0{,}98} \Rightarrow \delta V \approx V\, 2\, \frac{0{,}01}{0{,}98} \approx 0{,}19\ cm^3$$

$\frac{\delta d}{d}$ = incerteza relativa da medida de "d" $\approx 0{,}0102$

$\frac{\delta h}{h}$ = incerteza relativa da medida de "h" $\approx 0{,}004$

Como $\frac{\delta h}{h} < \frac{\delta d}{d}$ dizemos que a medida de "h" foi mais precisa!

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

Conclusão: a medida mais precisa é a que tem a menor incerteza relativa! A medida mais precisa não necessariamente é feita com o instrumento mais preciso como mostra o exemplo acima!

6

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

Em geral $F = a\, x^{\alpha} y^{\beta}$ $\quad \alpha, \beta, a$ números reais quaisquer

7

$$V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h$$

$V \to F \qquad \alpha = 2$

$x \to d \qquad \beta = 1$

$y \to h \qquad a = \frac{\pi}{4}$

$$\left|\frac{\delta F}{F}\right| = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{\partial x}{x}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\partial y}{y}\right)^2}$$

incertezas relativas!

Dem.:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a\,\alpha\, x^{\alpha-1} y^{\beta} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = a\,\beta\, x^{\alpha} y^{\beta-1}$$

$$\left|\frac{\partial F}{F}\right| = \frac{1}{|a x^{\alpha} y^{\beta}|}\sqrt{(a\,\alpha\, x^{\alpha-1} y^{\beta})^2 \delta x^2 + (a\,\beta\, x^{\alpha} y^{\beta-1})^2 \delta y^2} = \frac{1}{|a x^{\alpha} y^{\beta}|}\sqrt{(a x^{\alpha} y^{\beta})^2 \left(\alpha^2 \left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\cancel{|a x^{\alpha} y^{\beta}|}}{\cancel{|a x^{\alpha} y^{\beta}|}} \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2}$$

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

- **Erros Estatísticos:** Aparecem quando uma mesma grandeza é medida repetidamente. A aleatoriedade dos resultados resulta do processo de medida. Todo processo de medida tem uma aleatoriedade intrínseca. Assim podemos dizer que todo processo de medida é um processo aleatório.

Exemplo: a estimativa do tempo de queda de um objeto é um processo aleatório.

Fatores da aleatoriedade do processo:

i) tempo de reação visual
ii) tempo de reação motora

- intrínsecos de cada pessoa
- em cada rodada os valores podem mudar.

O processo aleatório pode ser analisado construindo um Histograma!!!

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

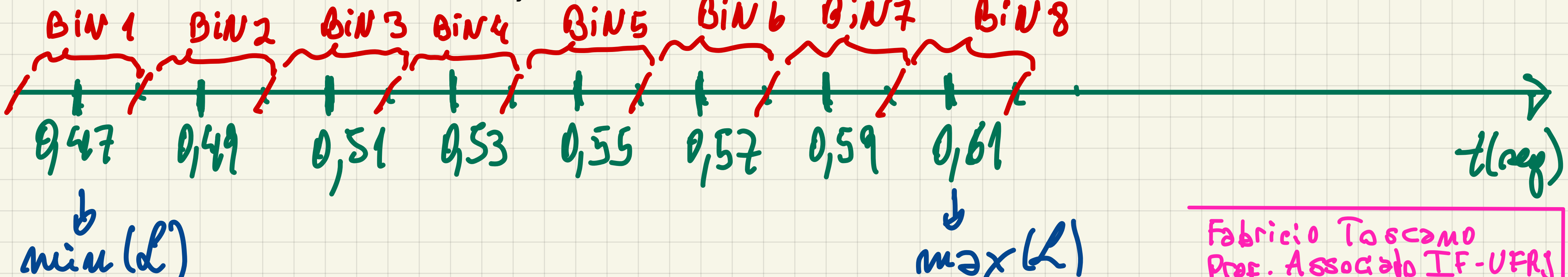
• Histograma: → 1) Histograma de frequências
→ 2) Histograma normalizado por áreas.

1) Histograma de frequências

passo 1: determino o máximo e o mínimo da lista de valores medidos

Exemplo: tempo de queda em segundos:

$\mathcal{L}$ = {0.52, 0.56, 0.54, 0.53, 0.53, 0.56, 0.52, 0.51, 0.51, 0.54, 0.56, 0.5, 0.53, 0.54, 0.54, 0.49, 0.56, 0.49, 0.52, 0.54, 0.5, 0.57, 0.53, 0.58, 0.58, 0.58, 0.55, 0.54, 0.53, 0.51, 0.54, 0.52, 0.52, 0.56, 0.5, 0.51, 0.53, 0.58, 0.55, 0.48, 0.56, 0.5, 0.57, 0.56, 0.52, 0.56, 0.55, 0.49, 0.52, 0.52, 0.61, 0.49, 0.51, 0.53, 0.58, 0.55, 0.56, 0.51, 0.49, 0.58, 0.57, 0.52, 0.54, 0.58, 0.55, 0.59, 0.51, 0.53, 0.54,0.52, 0.53, 0.58, 0.52, 0.58, 0.5, 0.54, 0.56, 0.54, 0.54, 0.51, 0.56, 0.56, 0.57, 0.56, 0.54, 0.53, 0.53, 0.61, 0.57, 0.56, 0.54, 0.47, 0.51, 0.57, 0.58, 0.58, 0.51, 0.5, 0.54, 0.54, 0.53, 0.57, 0.56, 0.58, 0.54, 0.55, 0.48, 0.53, 0.54, 0.56, 0.55, 0.52, 0.54, 0.56, 0.57, 0.52, 0.56, 0.51, 0.5, 0.51}



Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

Passo 2: Escolho o número de bins N

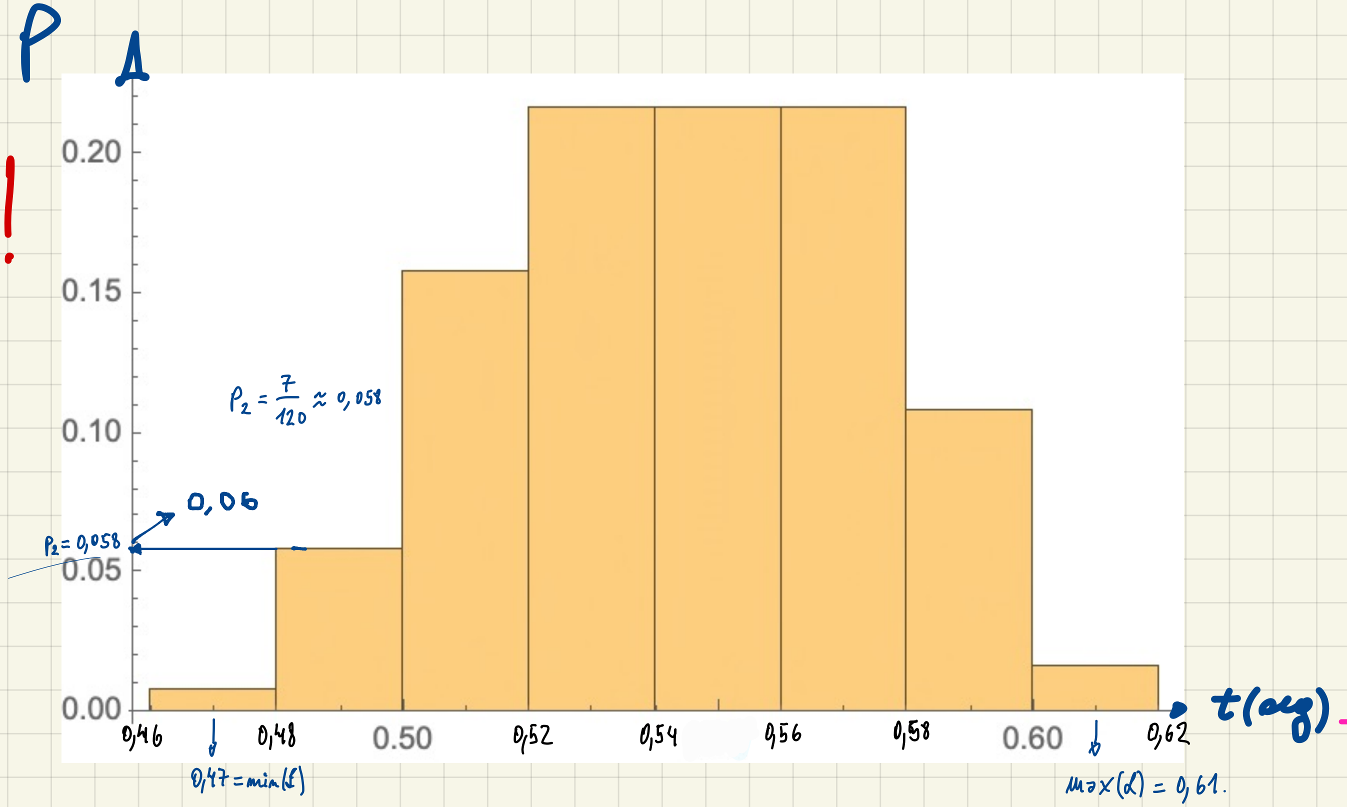
No exemplo anterior uma escolha razoável é $N = 8$

Passo 3: Cálculo das frequências $p_j = \frac{n_j}{N}$

n_j = número de resultados no "j-ésimo" bin.

Passo 4: Desenho as barras para cada bin

sem unidades!



Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

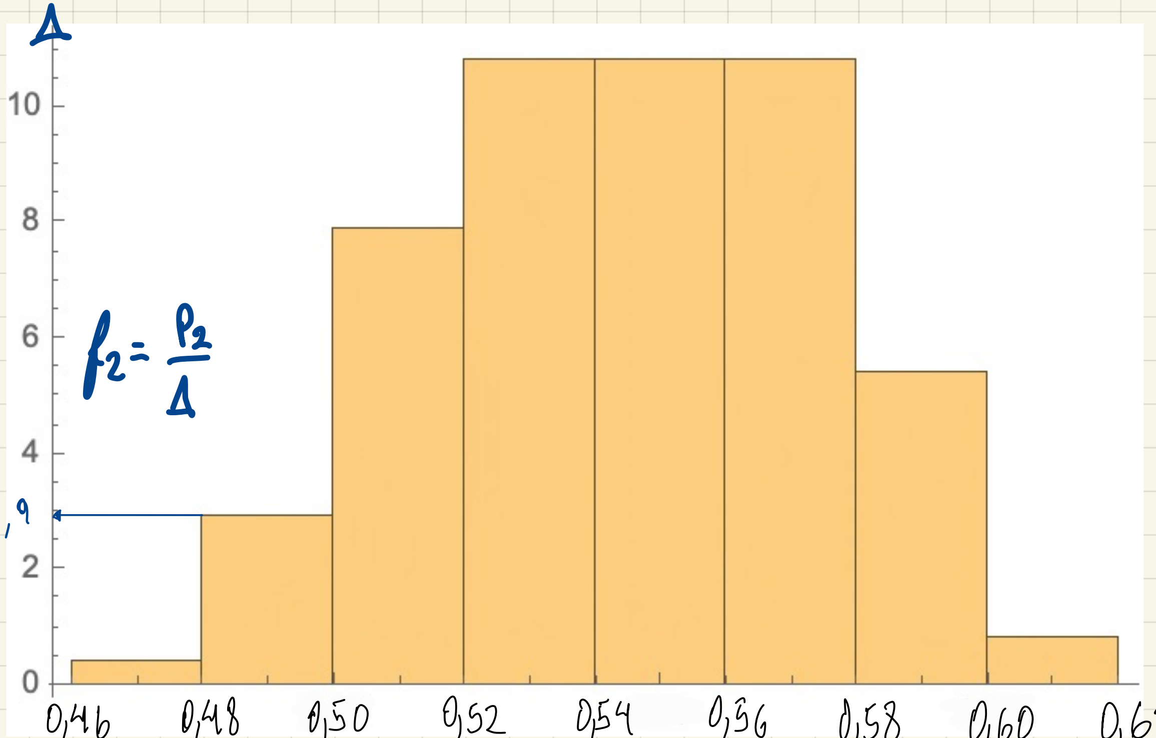
2) Histograma normalizado por área:

Segue todos os passos vistos antes mas agora a altura de cada bin é determinada pela "densidade da amostra" → $f_j = \frac{P_j}{\Delta} = \frac{n_j}{N\Delta}$

Δ = tamanho do bin

tem unidades! $f\left(\frac{1}{seg}\right)$

$\Delta = 0{,}02$ seg



$f_2 = \frac{P_2}{\Delta}$

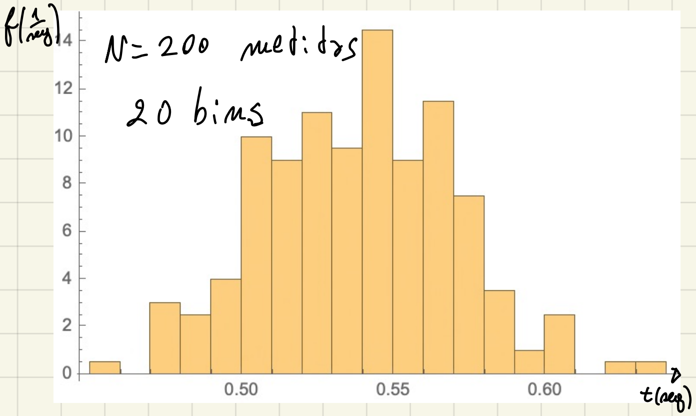
$f_2 \simeq 2{,}9$

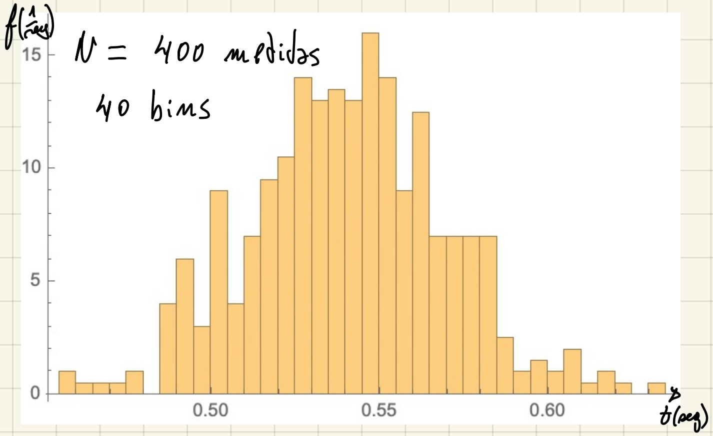
0,46 0,48 0,50 0,52 0,54 0,56 0,58 0,60 0,62 t (seg)

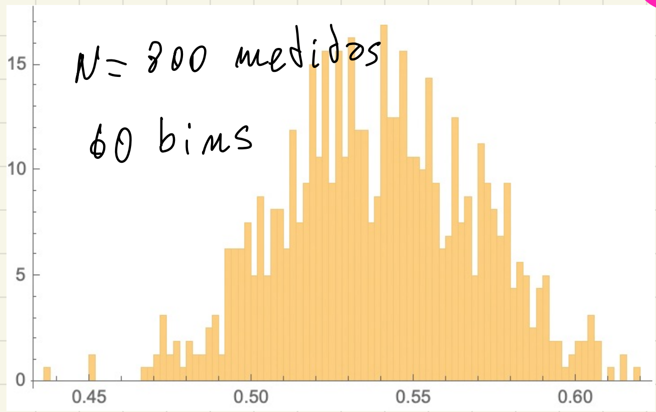
Área das barras $= \sum_{j=1}^{N_{bins}} f_j \Delta = 1$

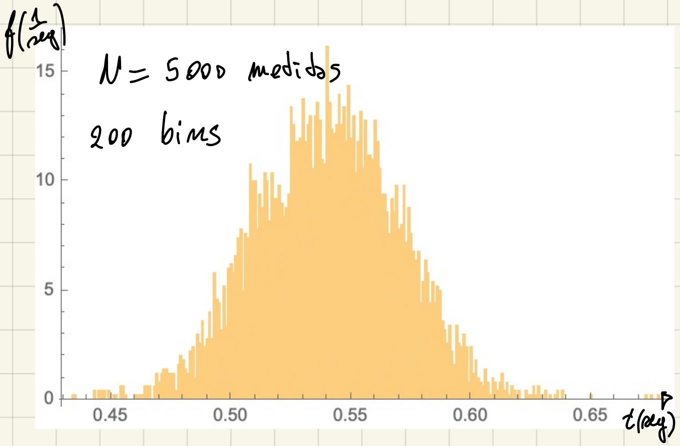
Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

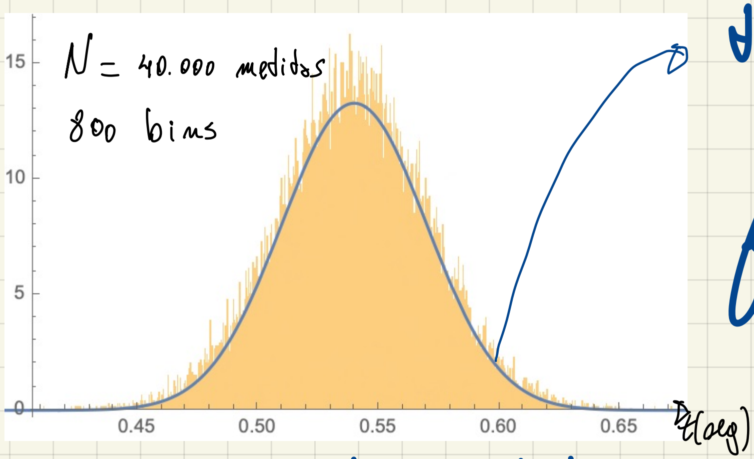
Histograma limite e Distribuição de probabilidades do processo aleatório de medida.











distribuição Limite

$$f(t) = \frac{e^{-\frac{(t-\mu_v)^2}{2\sigma_v^2}}}{\sigma_v\sqrt{2\pi}}$$

Função Gaussiana ou distribuição Normal

μ_v = média do processo aleatório de medida.

σ_v = desvio padrão do processo aleatório de medida

Se as fontes de aleatoriedade no processo de medida forem independentes então o Histograma limite tende à distribuição normal !!!

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

Estimando os parametros μ_v e σ_v da distribuição normal (distribuição Limite) 13

Problema: como encontrar a melhor estimativa de μ_v e σ_v com amostras finitas!

- A melhor estimativa da média μ_v é a média $\bar{t}$ da amostra

$$\mu_v = \lim_{N \to \infty} \bar{t} = \lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}$$

N = número de medidas

- A melhor estimativa de σ_v é o chamado "desvio padrão":

$$\sigma_v = \lim_{N \to +\infty} \sigma$$

desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (t_i - \bar{t})^2}$$

atenção é $N-1$!!!

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

Conclusão: A repetição da medida de uma grandeza é um processo aleatório caracterizado por uma distribuição normal de média μ_v e desvio padrão da Gaussiana σ_v. Estes parâmetros são intrínsecos ao processo particular de medida (Exemplo: tempo de reação da mão de Maria, etc).

Para amostras finitas usamos a média da amostra e o desvio padrão para estimar μ_v e σ_v,

$$\bar{t} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j \rightarrow \text{média da amostra} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(t_j - \bar{t})^2} \rightarrow \text{desvio padrão}$$

Podemos usar o desvio padrão σ como valor da incerteza de cada medida individual

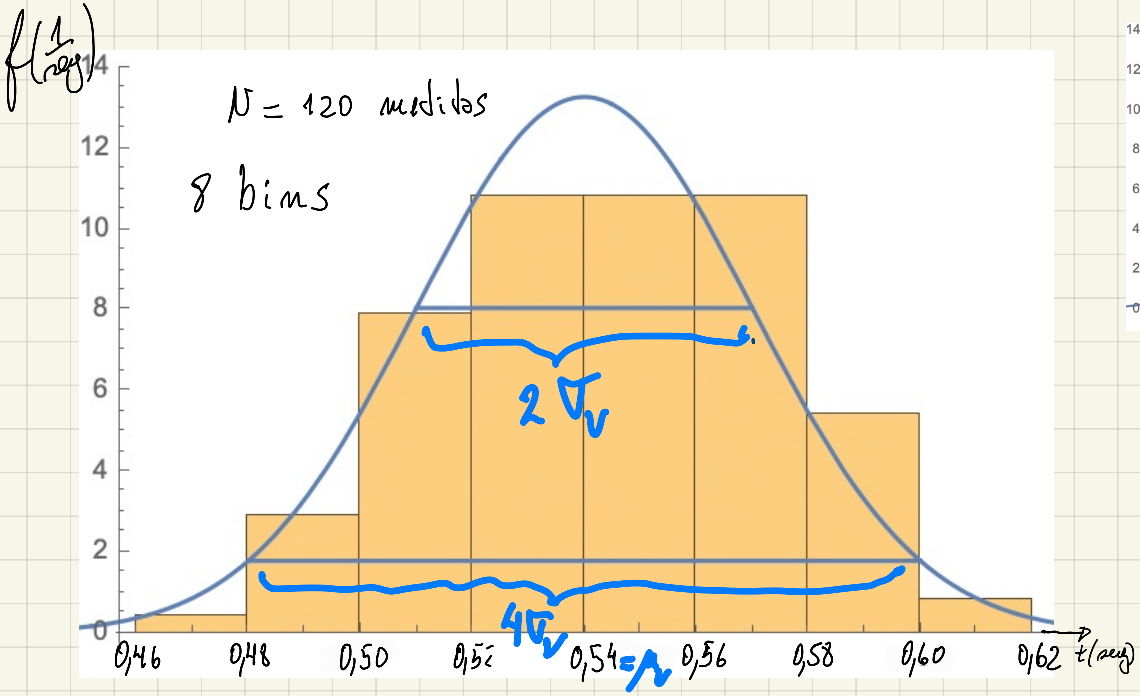
Ex:

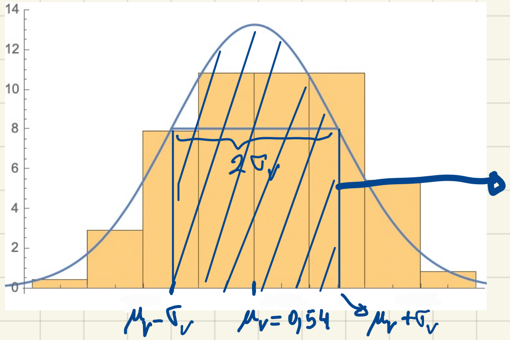
$$t_2 = (0{,}56 \pm \underbrace{0{,}03}_{\sigma \text{ para } N=120})\ \text{seg}$$

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

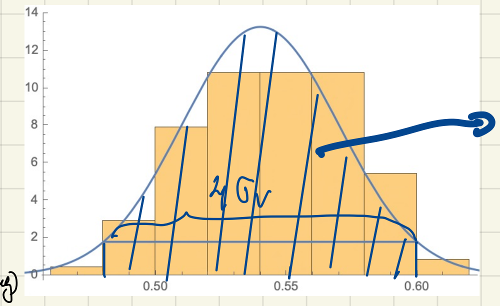
Intervalos de confiança

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ





Área $= \int_{\mu_v-\sigma_v}^{\mu_v+\sigma_v} f_{Gaussiana}(t)\,dt \approx 0{,}68$



Área $= \int_{\mu_v-2\sigma_v}^{\mu_v+2\sigma_v} f_{Gaussiana}(t)\,dt \approx 0{,}95$

Notem que no exemplo $\bar{t} = 0{,}538917 \simeq 0{,}54 = \mu_v$
e $\sigma \simeq 0{,}0289246 \simeq 0{,}03 = \sigma_v$

Assim no intervalo $[\bar{t}-\sigma, \bar{t}+\sigma]$ espera-se encontrar um resultado de medida com 68% de probabilidade e no intervalo $[\bar{t}-2\sigma, \bar{t}+2\sigma]$ com 95% de probabilidade e no intervalo $[\bar{t}-3\sigma, \bar{t}+3\sigma]$ com 99% de probabilidade!!!

Distribuição das Médias:

médias — desvios padrões

16

rodada 1 $\rightarrow \{t\} = \{t_{11}, t_{12}, \cdots t_{1N}\} \rightarrow \bar{t}_1, \sigma_1$

rodada 2 $\rightarrow \{t\} = \{t_{21}, t_{22}, \cdots, t_{2N}\} \rightarrow \bar{t}_2, \sigma_2$

$\vdots$

rodada M $\rightarrow \{t\} = \{t_{M1}, t_{M2}, \cdots, t_{MN}\} \rightarrow \bar{t}_M, \sigma_M$

As médias $\bar{t}_j$ são resultados aleatórios!!!

Quando $N \rightarrow +\infty$ o processo aleatório para a média $\bar{t}$ é caracterizado também por uma distribuição normal

$$\bar{\mu}_V = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \bar{t}_j \overset{N \text{ grande}}{\approx} \bar{t} \qquad \bar{\sigma}_V \overset{N \text{ grande}}{\approx} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(t_k - \bar{t})^2}$$

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

Apresentação do resultado final do processo de medida.

$$t_{queda} = \left(\bar{t} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) \quad \text{se } \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \gg \text{precisão do instrumento de medida}$$

Notar que no nosso exemplo

$$\frac{\sigma}{\sqrt{120}} \approx \frac{0{,}03}{\sqrt{120}}\,seg \approx 0{,}002\,seg < 0{,}01 = \text{precisão do cronômetro digital!}$$

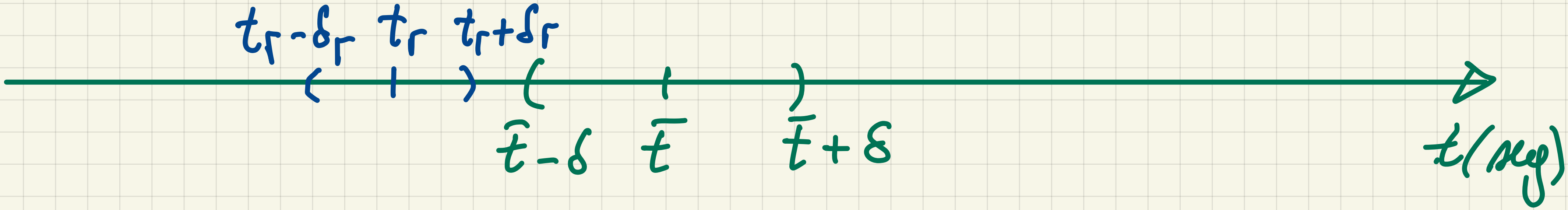
Então

$$t_{queda} = \left(\bar{t} \pm \text{precisão do instrumento}\right) \quad \text{se } \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \text{precisão do instrumento de medida}$$

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

Como detecto que existe um erro sistemático?

Situação onde ocorre erro sistemático



onde $\delta = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$ ou $\delta = \dfrac{2\sigma}{\sqrt{N}}$ ou $\delta = \dfrac{3\sigma}{\sqrt{N}}$ ou

δ = precisão do instrumento

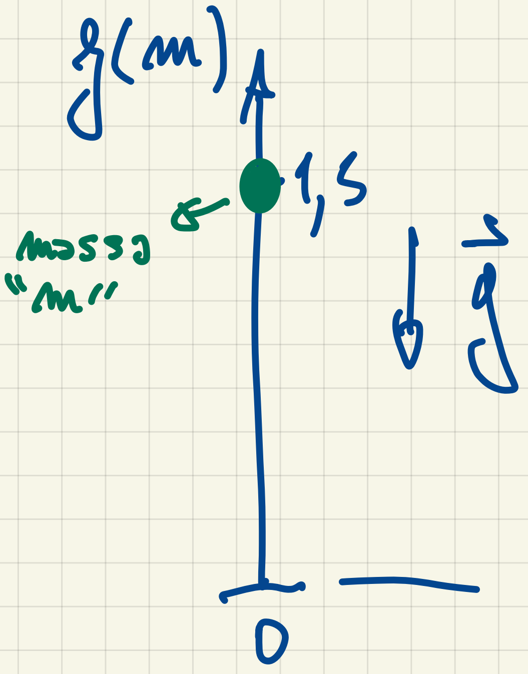
t_r = valor de referência

δ_r = incerteza do valor de referência

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

Material suplementar:

Desprezando a resistência do ar o tempo de queda da massa "m" é:



$$y_0 = 1{,}5\,m$$

$$|\vec{g}| = g = 9{,}8\ \frac{m}{seg^2}$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \qquad y(t_f) = 0$$

$$0 = y_0 - \frac{g}{2} t_f^2 \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2 y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2\ 1{,}5}{9{,}8}} \approx 0{,}55\,seg.$$

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

20

$$v = \frac{v_T}{5} \qquad \frac{\partial v}{\partial v_T} = \frac{1}{5}$$

$$\delta v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial v_T}\right)^2 \cdot (\delta v_T)^2} = \left|\frac{\partial v}{\partial v_T}\right| \delta v_T .$$

$$\boxed{\delta v = \frac{1}{5}\,\delta v_T .}$$

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ

21

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} = x^2 y^{-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} 2x = \frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(-1)\, y^{-1-1} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Fabricio Toscano
Prof. Associado IF-UFRJ