

Física Experimental I

MATERIAL AUXILIAR

2022.1

Conteúdo

I	Conceitos Básicos para Análise de Dados	5
1	Medidas e incertezas	7
2	Medidas Diretas e Indiretas	11
3	Algarismos Significativos	15
3.1	Incertezas e algarismos significativos	16
3.2	Regra de bolso sobre algarismos significativos	18
4	Representações gráficas	21
5	Métodos para o ajuste de uma função linear	27
5.1	Método gráfico com incerteza	27
5.2	Método dos Mínimos Quadrados	28
5.3	Teste de compatibilidade por χ^2	33
6	Determinação da velocidade instantânea	35
7	Distribuição Gaussiana	37

PARTE I

CONCEITOS BÁSICOS PARA ANÁLISE DE DADOS

Medidas e incertezas

Uma das maneiras para conhecer e descrever a natureza que nos rodeia é mediante a realização de observações experimentais, que chamamos de medidas. O primeiro problema com o qual nos encontramos é como os resultados encontrados podem ser comunicados de maneira clara, de forma que sejam compreensíveis e reproduzíveis por outros experimentadores. Para estabelecer o valor de uma grandeza (mensurando) temos que utilizar instrumentos e um método de medida, como também é necessário definir as unidades da medida. Por exemplo se desejamos medir a largura de uma mesa, o instrumento de medição será uma régua ou uma trena e, utilizando o sistema de unidades internacional (SI), a unidade que utilizaremos será o metro (m). A régua, portanto, estará calibrada nessa unidade ou em seus submúltiplos, como, por exemplo, centímetros e milímetros. O método de medição consistirá em determinar quantas vezes a unidade e as frações dela estão contidas no valor do mensurando.

Toda medição é afetada por uma incerteza que provém das limitações impostas pela precisão e exatidão dos instrumentos utilizados, da interação do método de medição com o mensurando, da definição do objeto a medir, e da influência do(s) observador(es) que realiza(m) a medição.

O que se procura em cada medição é conhecer o valor medido (x) e a sua incerteza (δ_x) na determinação do resultado, ou seja, determinar os limites probabilísticos destas incertezas. Procura-se estabelecer um intervalo

$$x - \delta_x < x < x + \delta_x \quad (1.1)$$

como ilustrado na Figura 1.1, dentro do qual podemos dizer que o valor da grandeza se encontra, com uma certa probabilidade. Em geral utiliza-se como incerteza um intervalo em torno do valor central com 68% de probabilidade.

Não existem regras para determinar o tamanho do intervalo, porque dependerá de muitos fatores do processo de medição. O tipo de medição, a figura da escala, a acuidade visual de quem esteja fazendo a medida, as condições de iluminação, etc, formarão parte na determinação da largura do intervalo de medição. A incerteza associada a uma medida

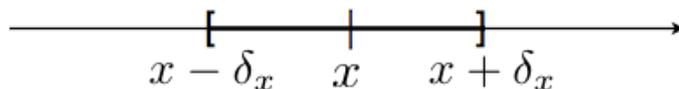


Figura 1.1: Intervalo de probabilidade para a grandeza medida, onde x é o valor mais representativo da nossa medição e δ_x é a incerteza absoluta.

deve ser determinada a cada vez que se faça a medição. Por exemplo, é comum pensar que quando fazemos uma medida com uma régua com escala graduada, a “incerteza de leitura (incerteza instrumental)” é automaticamente a metade da menor divisão. Um instrumento com divisões muito finas usado para medir um objeto com bordas mal definidas pode dar um intervalo de medição maior que várias das divisões menores. Contrariamente, um objeto bem definido com boas condições visuais pode permitir a identificação de um intervalo de medição muito menor que a menor divisão da escala. Cada situação deve ser avaliada de forma individual.

Uma forma usual de expressar o resultado de uma medição é:

$$x \pm \delta_x \quad (1.2)$$

e indicando a *unidade de medição*. Além disso é possível definir a *incerteza relativa* como:

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{x} \quad (1.3)$$

que expressa o quão significativa é a incerteza em relação a valor medido. Também pode-se calcular a *incerteza relativa percentual* como:

$$\epsilon_{\%} = \epsilon_x \cdot 100\% = \frac{\delta_x}{x} \cdot 100\% \quad (1.4)$$

Por exemplo, ao medir o comprimento L de uma mesa podemos apresentá-lo como $L = (1,00 \pm 0,01) \text{ m}$ ou $L = 1,00 \pm 0,01 \text{ m}$, onde $0,01 \text{ m}$ é a incerteza da medida. É importante apresentar sempre o valor central e a incerteza na mesma unidade. Essa medição tem um incerteza relativa de $0,01(0,01/1,00)$ e uma incerteza relativa percentual de 1% . A palavra **precisão** muitas vezes é utilizada como sinônimo de incerteza relativa percentual. Note, no entanto, que nem sempre a precisão de uma medida corresponde à precisão do instrumento utilizado para realizá-la. A precisão de um instrumento será discutida em contraposição ao conceito de acurácia mais abaixo.

Incertezas

Os distintos tipos de incertezas podem ser classificados em:

- **Incertezas do instrumento:** Os instrumentos de medição têm uma incerteza finita que está associada à variação mínima da magnitude que ele mesmo pode detectar. Por exemplo, se temos uma régua graduada em milímetros, não será possível detectar variações muito menores que uma fração de milímetro. Se, ao lermos o valor medido na régua, aproximamos para o valor inteiro em mm que mais se aproxima da medida, dizemos que a incerteza da régua é de 1 mm. Se, ao contrário, conseguimos identificar valores múltiplos de meio milímetro, então dizemos que a incerteza é de 0,5 mm. Não é, no entanto, razoável supor que conseguimos identificar a olho nú frações menores que 0,5 mm em uma régua milimetrada.
- **Incertezas estatísticas ou aleatórias:** São as devidas flutuações aleatórias na determinação do valor do mensurando entre uma medida e outra. Estas flutuações ocorrem com igual probabilidade tanto para mais quanto para menos. Portanto, medindo várias vezes e calculando a média, é possível reduzir a incerteza significativamente. Estas incertezas são tratadas pela teoria estatística de erros de medição.
- **Incertezas sistemáticas:** Acontecem pelas imperfeições dos instrumentos e métodos de medição e sempre se produzem no mesmo sentido (não podem ser eliminados com várias medições). Alguns exemplos podem ser um relógio que atrasa ou adianta, uma régua que se dilata, o erro devido à paralaxe, etc...

A interação do método de medição com o mensurando também pode introduzir erros. Consideremos como exemplo a medição de temperatura para a qual utilizamos um termômetro. Parte do calor do objeto que queremos medir flui ao termômetro (ou vice-versa), de maneira que o resultado da medição do valor da temperatura difere do original devido à presença do termômetro (interação que devemos realizar). Fica claro que esta interação pode ser desprezível, se, por exemplo, estamos medindo a temperatura de um litro de água, mas a quantidade de calor transferida ao termômetro pode ser significativa se a quantidade de volume é uma fração pequena de, por exemplo, um mililitro e utilizamos um termômetro convencional.

Precisão e exatidão

A precisão de um instrumento ou um método de medida está relacionada à sensibilidade ou menor variação de uma grandeza que pode ser detectada com certo instrumento ou método. Dizemos que um paquímetro (por exemplo, com mínima divisão de 0,01 mm) é mais preciso que uma régua (mínima divisão 1 mm) ou que um cronômetro (por exemplo com mínima divisão 10 ms) é mais preciso que um relógio (mínima divisão 1 s), etc. Quanto menor a **incerteza relativa** de uma medição, mais precisa ela é. É importante notar que o valor absoluto da incerteza isoladamente não é suficiente para qualificar a precisão de

uma medida. Por exemplo, reportar a distância entre Rio e São Paulo com incerteza de um metro certamente é muito bom. Por outro lado, medir o comprimento de um carro com incerteza de um metro é muito ruim. Qual a diferença? No primeiro caso, estamos falando de uma dúvida de um metro em cerca de 500 km e no segundo caso, a incerteza é de um metro em cerca de 4 metros.

Além da precisão, é importante realizar uma medição com exatidão ou, utilizando um termo mais antigo, acurácia. Esta está geralmente relacionada com a qualidade da calibração do instrumento utilizado ou o método de medição aplicado. Imaginemos que utilizamos um cronômetro para medir os tempos com uma precisão de 10 ms, mas sabemos que atrasa 1 minuto cada uma hora. Por outro lado, utilizamos um relógio com uma precisão de 1 s que marca a hora certa a todo instante. Neste caso vamos dizer que o cronômetro é o mais preciso, mas o relógio é o mais acurado. Um critério para se comparar a exatidão de duas medidas é dado pela menor discrepância relativa. A discrepância é definida como o módulo da diferença entre o valor medido e um valor de referência para a grandeza e a discrepância relativa é definida como o módulo da razão entre a discrepância e o valor de referência. Quanto menor a discrepância relativa de uma medida, mais exata ou acurada ela é.

Portanto, procuraremos sempre realizar uma medição utilizando um método que seja preciso e exato ao mesmo tempo.

Medidas Diretas e Indiretas

Para estabelecer o valor de uma grandeza temos que utilizar um instrumento de medição e um método de medição. Além disso, será necessário definir as unidades em que essa magnitude é medida. Por exemplo, se queremos medir a largura de uma mesa, utilizaremos uma régua e, dependendo do sistema de medição escolhido, expressaremos o valor medido em unidades de comprimento como, por exemplo, o metro (m) para o sistema de unidades internacional (SI) ou centímetros (cm) no caso do CGS. O método de medição consistirá em determinar a quantidade de unidades da menor fração da régua que correspondem ao comprimento que se deseja medir. Quando uma medição é realizada lendo o resultado diretamente em um instrumento (construído para isso), dizemos que a **medida é direta**. Há grandezas que não se medem diretamente, mas que são obtidas a partir de outras grandezas medidas de forma direta. Por exemplo, para conhecer área de um retângulo medem-se os comprimentos de seus lados ou para determinar o volume de uma esfera deve-se medir o diâmetro. Neste caso a **medida é indireta**.

Medidas diretas com flutuações aleatórias

Consideremos uma grandeza da qual se fazem N medições diretas, que chamaremos: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Estes valores serão geralmente distintos entre si, mas alguns valores podem se repetir.

Evidentemente não será satisfatório fornecer como resultado da medição uma tabela de N valores. É necessário caracterizar a série de medições mediante uns poucos parâmetros que tenham um significado preciso relacionado com a magnitude medida e/ou o processo de medição utilizado. Os parâmetros importantes são:

1. **Valor médio** é a média aritmética dos valores medidos

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.1)$$

e é o valor atribuído à magnitude medida. É bastante intuitivo considerar a média aritmética como valor representativo da grandeza medida. A média aritmética se caracteriza por apresentar as medições ao seu redor, de modo que a soma dos desvios

$$\delta_i = x_i - \bar{x}, \quad (2.2)$$

é igual a zero. Ou seja,

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i = 0. \quad (2.3)$$

Isto pode ser facilmente demonstrado, escrevendo:

$$S = \sum_{i=1}^N \delta_i = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}), \quad (2.4)$$

e distribuindo o somatório, de modo que:

$$S = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i - N\bar{x}. \quad (2.5)$$

Utilizando a expressão do valor médio (equação 2.1):

$$\sum_{i=1}^N x_i = N\bar{x}, \quad (2.6)$$

obtemos $S = 0$ como queríamos mostrar.

Por esta razão, a soma dos desvios não é um parâmetro que possa ser utilizado para caracterizar a distribuição das medições ao redor do valor médio e é necessário utilizar outro parâmetro.

2. Dispersão das medições ou **desvio padrão** define-se como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}. \quad (2.7)$$

O desvio padrão é um parâmetro que caracteriza o processo de medida. Quando as medições são poucas, σ pode flutuar, mas para muitas medidas (N grande) estabiliza-se e não depende do número de medições.

3. O **erro ou incerteza do valor médio** é definido como:

$$\xi = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_r^2}, \quad (2.8)$$

onde σ_m está associado às flutuações estatísticas em torno do valor médio:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.9)$$

e σ_r expressa os erros sistemáticos residuais (por exemplo devido à um instrumento mal calibrado).

Vamos supor que nas nossas medidas não ocorrem tais erros sistemáticos, de forma que usaremos sempre:

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \quad (2.10)$$

O erro do valor médio é a dispersão esperada para as médias de várias séries de medições realizadas nas mesmas condições. O erro do valor médio depende do número de medições como se pode ver na sua expressão, sendo que ela diminui com o aumento do número de medições.

Medidas Indiretas

Como já foi definido anteriormente, há grandezas que não podem ser determinadas diretamente, mas que se obtém a partir de outras grandezas que, estas sim, são medidas de forma direta. Portanto, as incertezas das grandezas que se medem diretamente devem ser propagadas para contribuir à incerteza da grandeza que se calcula utilizando uma determinada expressão.

Sejam x_1, x_2, \dots, x_N grandezas independentes medidas de forma direta, e seja a grandeza que se quer determinar $F = F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ uma função das grandezas x_1, x_2, \dots, x_N , cujas incertezas estão dadas por $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_N$. Pode-se mostrar que a incerteza de F é dada por:

$$(\delta F)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \delta x_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \delta x_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_N}\right)^2 \cdot \delta x_N^2, \quad (2.11)$$

ou

$$(\delta F)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \delta x_i^2. \quad (2.12)$$

Esta equação é a fórmula de propagação da incerteza para uma grandeza determinada indiretamente.

Comparação entre duas medidas da mesma grandeza

Muitas vezes comparamos diferentes resultados experimentais para a medida de uma mesma grandeza. Estes resultados podem vir por exemplo das diferentes técnicas utilizadas para determinar uma grandeza, ou podem vir de valores conhecidos tabulados na

literatura. Vamos supor que temos dois resultados para uma mesma grandeza sendo o primeiro $x_1 \pm \delta x_1$ e o segundo $x_2 \pm \delta x_2$. Se eles são estimativas de uma mesma grandeza, esperamos que a discrepância entre eles ($|x_1 - x_2|$) seja compatível com zero. Como cada uma das medidas está sujeita a uma flutuação estatística de acordo com sua incerteza, em geral encontramos valores diferentes de zero para a discrepância. Como podemos avaliar se a discrepância é significativamente diferente de zero? Há várias formas de se fazer essa avaliação, dependendo do grau de confiança que queremos ter na afirmação de que a diferença é incompatível com zero (ou equivalentemente de que os dois valores são incompatíveis entre si). Vamos considerar a discrepância entre os valores ($|x_1 - x_2|$) pouco significativa ou irrelevante quando for menor que 3 vezes a incerteza da discrepância. Utilizando a expressão para propagação de incertezas definida na Seção 2, determinamos a incerteza da discrepância $\delta|x_1 - x_2| = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$. Resumindo, duas medidas independentes x_1 e x_2 da mesma grandeza são consideradas **compatíveis** quando :

$$|x_1 - x_2| < 3\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}$$

ou

$$\frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2}} < 3.$$

Ao contrário, consideramos as duas medidas x_1 e x_2 **incompatíveis** quando a discrepância entre elas é maior que 3 vezes a incerteza da discrepância.

Considere por exemplo a medida de um comprimento de uma mesa cujo resultado é $L_{exp} = (98 \pm 1)$ cm. Como podemos ver se esse resultado é compatível com o valor nominal fornecido pelo fabricante, que é de $L_{nom} = 1$ m? Como o valor nominal nesse caso não tem incerteza, a incerteza da discrepância é igual à incerteza da medida experimental. A discrepância é de 2 cm, que é apenas duas vezes a incerteza da discrepância e a medida é, portanto, compatível com o valor nominal. Uma outra forma de ver isso é analisando se o valor nominal está contido no intervalo de valores $I_{exp} = [L - 3\delta L, L + 3\delta L]$. Nesse caso, o valor 100 cm está contido no intervalo $I_{exp} = [95, 101]$ cm.

Em um outro exemplo, um estudante mede o valor da aceleração da gravidade e encontra $g_{exp} = 9,21 \pm 0,01$ m/s² e quer comparar com o valor tabelado $g = 9,787 \pm 0,001$ m/s². Temos:

$$\frac{|g_{exp} - g|}{\sqrt{\delta g_{exp}^2 + \delta g^2}} = \frac{0,577}{0,01005} \approx 57 \gg 3.$$

Logo, os dois valores são incompatíveis.

Algarismos Significativos

Imagine que você pergunta a hora a uma pessoa com um relógio de pulso analógico, como o mostrado na Figura 3.1. Essa pessoa dá uma olhada no relógio, e responde: são 10 horas e 42 minutos. Você entende que o ponteiro dos minutos certamente estava entre o 8 e o 9, ou seja, corresponde a um valor entre 40 e 45 minutos, mais próximo de 40 do que de 45. Dizemos que esse algarismo que foi estimado, o 2, é um **algarismo duvidoso**. Os outros algarismos são **algarismos certos**: o ponteiro das horas estava entre 10 e 11, com certeza. O conjunto de algarismos certos e duvidosos são os **algarismos significativos da medida**. Quanto maior for o número de algarismos significativos em uma medida, mais informação ela traz.



Figura 3.1: Relógio marcando hora.

Quando realizamos uma medição direta de uma grandeza, a partir da leitura de um instrumento analógico, que apresenta uma escala, o procedimento que se usa para fazer o registro do valor da grandeza é anotar todos os algarismos fornecidos pela escala do instrumento, eventualmente acrescentando mais um algarismo, que represente uma fração da menor divisão da escala do instrumento. No exemplo acima, do relógio, ao estimar 42 minutos, a pessoa imaginou uma escala de subdivisão da menor divisão do relógio em 5 partes, cada uma delas correspondendo a 1 minuto, e estimou que o ponteiro estava mais perto de duas subdivisões. Quando o instrumento é digital, o múltiplo da menor medida que ele pode fazer corresponde ao algarismo duvidoso do valor lido. Em um cronômetro digital com resolução de 1 centésimo de segundo, que mede um intervalo de tempo de 12,04 s, o 4 é o algarismo duvidoso da medida direta.

Um ponto que sempre gera dúvida é se os zeros são significativos ou não. Para responder, pense em alterar as unidades da medida. Se o número de zeros mudar ao fazer essa alteração, eles não são significativos, já que indicam apenas em que unidades estamos escrevendo a medida. A medida $x_1 = 2,47$ cm tem três algarismos significativos, sendo o 7 duvidoso. Para escrever x_1 em metros, caminhamos a vírgula para a esquerda duas casas decimais e completamos com zeros. Nada foi feito em termos de alterar a quantidade de informação em x_1 , apenas trocamos as unidades, logo esses zeros de preenchimento não são significativos. Em resumo, as duas formas abaixo são equivalentes e têm três algarismos significativos:

$$x_1 = \underbrace{2,47}_{\text{sig}} \text{ cm} = 0,0 \underbrace{247}_{\text{sig}} \text{ m}$$

A mudança para uma unidade menor pode ser feita com ajuda de potências de dez, que não contam como algarismos significativos. Por exemplo, a medida x_2 , com dois algarismos significativos pode ser escrita nas formas equivalentes

$$x_2 = 0, \underbrace{52}_{\text{sig}} \text{ kg} = 0, \underbrace{52}_{\text{sig}} \times 10^3 \text{ g} = \underbrace{5,2}_{\text{sig}} \times 10^2 \text{ g}$$

Se escrevermos uma medida como $x_3 = 3,10$ s, ficará implícito que temos certeza dos três segundos e do um décimo de segundo. O zero na casa dos centésimos de segundo é duvidoso, sendo o último algarismo significativo da medida. Os zeros ao final do número são significativos. Observe mais um exemplo:

$$\underbrace{100}_{\text{sig}} \text{ m} = 0, \underbrace{100}_{\text{sig}} \text{ km} = \underbrace{1,00}_{\text{sig}} \times 10^8 \mu\text{m}$$

Também aqui os dois algarismos zero à direita do 1 são significativos, independentemente da unidade que escolhemos para registrar o valor. Ao todo o comprimento registrado tem 3 algarismos significativos.

3.1 Incertezas e algarismos significativos

Normalmente usamos um ou dois algarismos significativos para representar as incertezas, dependendo do grau de estimativa envolvido na sua determinação. Como vamos trabalhar com muitas estimativas na determinação das incertezas nas medidas diretas, usaremos a convenção de um significativo. Assim, o valor da medida deve ser escrito até a casa decimal afetada pela incerteza, como nos exemplos abaixo.

$$L = (2,25 \pm 0,05) \text{ cm} \quad M = (351 \pm 2) \times 10^{-2} \text{ kg}$$

No caso da incerteza de medidas indiretas, em geral é preciso arredondar o valor determinado a partir da propagação das incertezas das medidas diretas, explicado no Capítulo 2.

Para arredondar um determinado valor, vamos adotar os critérios da norma técnica da

Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT-5891:

1. quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo inferior a 5, permanece inalterado o algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6357 arredondado à primeira casa decimal torna-se 1,6);
2. quando o algarismo a ser conservado for seguido de um algarismo superior a 5, ou igual a 5 seguido de no mínimo um algarismo diferente de zero, soma-se uma unidade ao algarismo a ser conservado e retiram-se os posteriores (1,6678 torna-se 1,7 e 1,6505 torna-se 1,7, arredondados à primeira casa decimal);
3. Se o algarismo à seguida do algarismo a ser conservado for igual a 5 e não houver mais nenhum algarismo à sua direita ou se todos os algarismos à direita forem zeros, retira-se todos os algarismos posteriores ao que será conservado e :
 - (a) adiciona-se uma unidade ao algarismo conservado, se este for ímpar;
 - (b) permanece inalterado o algarismo conservado, se este for par.

Observe os arredondamentos abaixo, feitos de modo a que a medida tenha 3 algarismos significativos e seguindo os critérios acima:

- $x = 4,678 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$
- $y = 4,674 \text{ m} \rightarrow x = 4,67 \text{ m}$
- $z = 4,675 \text{ m} \rightarrow x = 4,68 \text{ m}$
- $w = 4,665 \text{ m} \rightarrow x = 4,66 \text{ m}$

Como exemplo, vamos calcular o peso p da massa $m = (234,40 \pm 0,02)\text{g}$ sabendo que $g = (9,7879 \pm 0,0001) \text{ m/s}^2$. Vamos trabalhar no SI, portanto escrevemos $m = (234,40 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg}$. Com isso,

$$p = m g = 2,29428376 \text{ N}$$

Agora vamos calcular a incerteza. Como temos um produto,

$$\left(\frac{\delta_p}{p}\right)^2 = \left(\frac{\delta_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta_g}{g}\right)^2 = \left(\frac{0,02}{234,00}\right)^2 + \left(\frac{0,0001}{9,7879}\right)^2 = 7,409 \times 10^{-10}$$

Logo,

$$\delta_p = 2,29428376 \text{ N} \times 2,72 \times 10^{-5} = 6,23 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Agora escrevemos a incerteza calculada com um significativo:

$$\delta_p = 6 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Finalmente escrevemos p até a quinta casa decimal, usando o critério de arredondamento, e escrevemos o resultado final:

$$2,29428\underline{3}76 \text{ N} \rightarrow p = (2,29428 \pm 0,00006) \text{ N}$$

Claro que também poderíamos usar a equação (2.12) para calcular a incerteza absoluta:

$$\delta_p = \sqrt{(m\delta_g)^2 + (g\delta_m)^2}.$$

3.2 Regra de bolso sobre algarismos significativos

Muitas vezes o cálculo da incerteza propagada pode ser bem longo e fica difícil de saber se o resultado está certo ou não. Uma forma simples de saber se pelo menos a ordem de grandeza da incerteza propagada está correta é usar a seguinte regra:

- Numa operação matemática envolvendo medidas com diferentes números de algarismos significativos o resultado terá aproximadamente o mesmo número de algarismos significativos que a medida com menor número.

Vamos calcular o volume V de um tubo de seção reta quadrada de lado $a = (2,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ e comprimento $L = (120,0 \pm 0,1) \text{ cm}$. A medida a tem 2 algarismos significativos e L , 4, sendo a mais precisa. Assim esperamos que V tenha entre 2 e 4 algarismos significativos. Vamos fazer a propagação:

$$V = a^2L \rightarrow V = a^2L = 120,0 \text{ cm}^3$$

$$\left(\frac{\delta_V}{V}\right) = \sqrt{\left(2\frac{\delta_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta_L}{L}\right)^2} = 0,1000034722$$

Um erro muito comum é esquecer que 0,1000034722 é a incerteza relativa e escrever este valor como se fosse a incerteza absoluta.

Calculando corretamente a incerteza absoluta, temos

$$\delta_V = V \left(\frac{\delta_V}{V}\right) = (480,0 \text{ cm}^3)(0,1000034722) = 48,001666656 \approx 4,8001666656 \times 10 \text{ cm}^3$$

Finalmente,

$$V = (48 \pm 5) \times 10 \text{ cm}^3$$

O resultado final tem dois algarismos significativos, como a medida menos precisa usada no cálculo. Se for necessário melhorar a precisão da medida de V , vale a pena medir a com mais precisão. Note que ao escrevermos o resultado final, utilizamos a mesma potência de 10 para V e para sua incerteza δ_V . Assim podemos saber qual deve ser o último algarismo

a ser conservado no valor da medida e realizar o arredondamento, se necessário. Neste caso, o arredondamento foi feito na casa da unidade de $1 \times 10 \text{ cm}^3$.

Como fazer um histograma

Quando fazemos uma análise estatística de um conjunto de N medidas de uma determinada grandeza, podemos realizar um gráfico no qual se representa para cada valor (ou intervalo de valores) o número de vezes em que este aparece. Este tipo de gráfico recebe o nome de **Histograma**. Um exemplo é mostrado na Figura 4.1. Como o conjunto de valores obtidos é discreto, resulta um esquema de barras. A largura destas barras é a menor diferença entre os valores medidos ou o tamanho do intervalo escolhido no caso em que seja conveniente agrupar vários valores num intervalo (isto deve ser determinado em função da série de medições realizadas). O número de barras depende do conjunto de dados e do número total de medições.

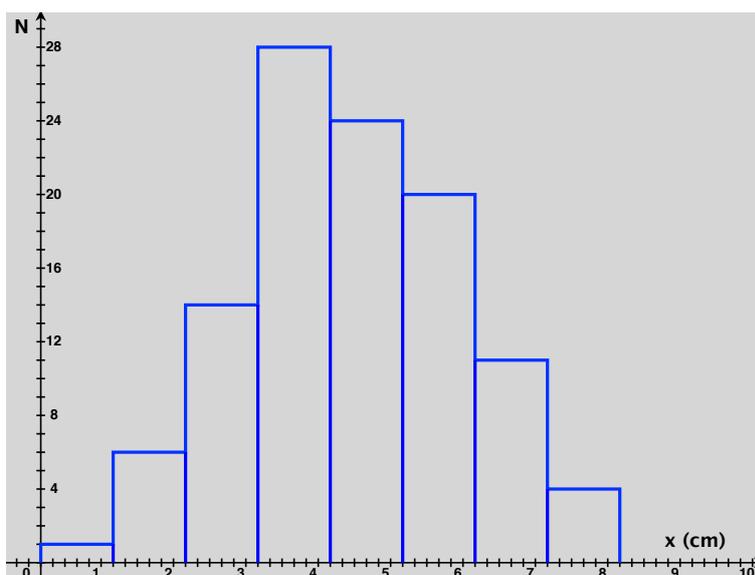


Figura 4.1: Exemplo de um histograma.

Para que fique mais claro, vamos considerar o seguinte exemplo. Medimos a altura de uma garrafa de água 40 vezes obtendo os seguintes valores, em centímetros:

20,3 20,1 20,2 20,5 20,2 19,7 20,6 20,4
 19,8 20,3 20,1 20,2 20,3 20,4 20,3 19,6
 20,0 19,5 20,7 20,3 20,1 20,7 20,5 20,5
 20,5 20,3 20,4 20,2 20,3 20,2 20,6 20,8
 20,4 20,0 19,9 20,6 20,8 19,7 20,9 20,3

Como podemos ver, há valores que se repetem e a frequência de repetição é diferente para cada valor. Esta informação pode ser apresentada em forma gráfica, mediante a construção de um histograma. Para isto devemos escolher valores ou intervalos de valores e determinar quantas vezes o valor se repete no conjunto de dados.

Para nosso exemplo, vamos escolher intervalos de 0,2 cm começando pelo menor valor medido de 19,5 cm. Desta forma o primeiro intervalo será de 19,5 a 19,7 cm, o segundo de 19,7 cm a 19,9 cm e assim sucessivamente. Cada intervalo será representado no gráfico pelo seu valor central, ou seja, para o primeiro será 19,6 cm, para o segundo 19,8 cm, etc. Como os intervalos são contínuos devemos escolher como serão os limites dos intervalos, aberto e fechado, pois, por exemplo, o valor 19,7 cm vai contar para o primeiro ou o segundo intervalo. No nosso exemplo, o valor inferior vai ser o fechado e o valor superior o aberto (ou seja, 19,7 cm vai contar para o segundo intervalo e não para o primeiro). Desta forma, podemos construir a Tabela 4.1, de frequências:

Tabela 4.1: Tabela de frequências absolutas e relativas em função da altura medida de uma garrafa.

Intervalo (cm)	Valor do Intervalo (cm)	Frequência	Frequência Relativa (%)
19,5 - 19,7	19,6	2	5,0
19,7 - 19,9	19,8	3	7,5
19,9 - 20,1	20,0	3	7,5
20,1 - 20,3	20,2	7	17,5
20,3 - 20,5	20,4	12	30,0
20,5 - 20,7	20,6	8	20,0
20,7 - 20,9	20,8	4	10,0
20,9 - 21,1	21,0	1	2,5

Uma vez construída a tabela, podemos fazer o gráfico no qual vamos colocar no eixo-x os

valores centrais dos intervalos escolhidos e no eixo-y o número de repetições (Frequência). Para isto deve ser escolhida uma escala adequada em cada eixo, de forma que a distância entre todos os valores centrais dos intervalos seja constante. Para o caso do eixo-y, a escala deve ser escolhida de forma tal que o valor mais repetido fique na parte superior do eixo, de forma que possa ser apreciada a estrutura do histograma. Uma vez escolhida a escala, uma barra será desenhada para cada intervalo com o tamanho da frequência determinada na tabela anterior, como mostramos no lado esquerdo da Figura 4.2.

Uma forma alternativa de se fazer o histograma é colocando no eixo-y a frequência relativa, ou seja, o número de repetições dividido pelo número total de medidas, frequentemente mostrado em porcentagem, como na última coluna da Tabela 4.1 e no histograma do lado direito da Figura 4.2.

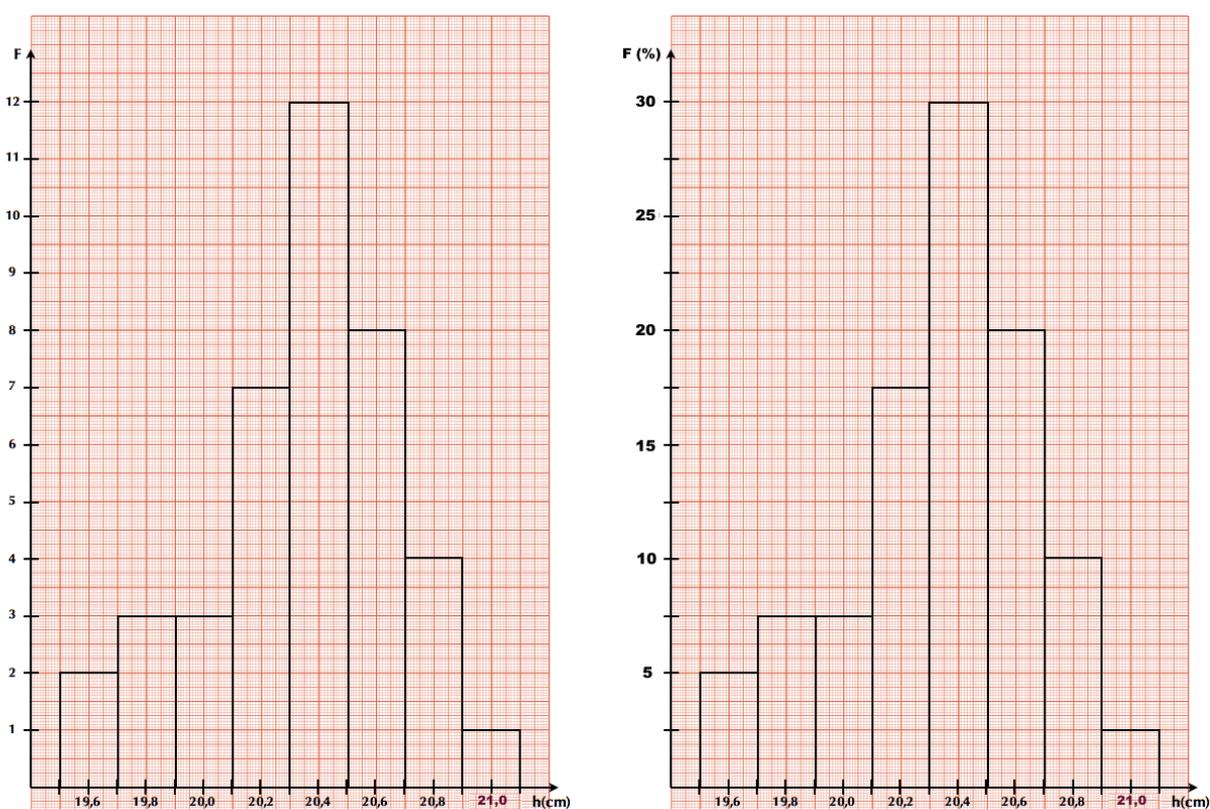


Figura 4.2: Histogramas de frequências (lado esquerdo) e frequências relativas (lado direito) da medida da altura (h) da garrafa de água .

Como construir um gráfico

Uma forma muito útil de apresentar os resultados experimentais é a partir de representações gráficas dos mesmos, pois neles a informação é sintetizada, facilitando sua análise e interpretação. Geralmente, um gráfico é mais útil que uma tabela de valores, por exemplo, quando estamos realizando medições de uma variável Y em função de outra X que varia independentemente e queremos ver a relação funcional entre elas (por exemplo, a posição de um móvel em função do tempo), ou para estudar se duas variáveis possuem alguma

correlação ou não.

Em Física Experimental I, todos os gráficos que realizaremos serão em duas dimensões além dos histogramas que já foram discutidos na sessão 4. O primeiro passo é escolher quais serão as variáveis e, logo, qual é a variável independente que será representada no eixo horizontal e qual a dependente no eixo vertical. Por exemplo, se queremos representar a posição de um corpo em movimento em função do tempo vamos identificar duas variáveis: posição (x) e tempo (t), sendo o tempo a variável independente. Ou seja, o tempo será colocado no eixo- x e a posição no eixo- y .

Uma vez escolhidas as variáveis, devemos determinar a escala para cada eixo. Para isto temos que considerar os valores medidos de cada variável, de forma a poder escolher uma escala que facilite a leitura dos pontos experimentais, ou qualquer outro ponto representado no gráfico. Quando desenhamos o gráfico em papel, devemos escolher a escala de forma a usar pelo menos metade da folha para representar os pontos experimentais. Para facilitar a leitura do gráfico, é interessante utilizar escalas em que cada milímetro do papel corresponda a múltiplos ou submúltiplos de 2 ou 5 da grandeza correspondente. A determinação da escala em cada eixo é independente.

Consideremos os seguintes valores medidos para o exemplo da posição do corpo em função do tempo:

Tempo (s)	Posição (m)	Incerteza da Posição (m)
0,1	29	1
0,3	34	1
0,4	41	1
0,5	38	1
0,7	33	1
1,0	26	1
1,1	23	1
1,2	20	1
1,4	17	1
1,5	16	1

Vamos construir o gráfico em papel milimetrado, usando a folha “na vertical”, de forma que o eixo- x fique na menor dimensão da mesma e o eixo- y na maior. Para o eixo- x , onde vamos representar o tempo, a escolha parece simples, começamos em 0 (zero) e consideramos uma escala de 10 mm para cada 0,1 s, pois o tamanho nesta dimensão é de 180 mm e nós precisamos marcar de 0 a 1,5 s. Para o eixo- y , onde vamos representar a posição, dispomos de 28 cm de folha. Neste caso, podemos considerar duas possibilidades: (A) começamos a escala a partir do zero ou (B) começamos ela perto do menor valor medido, neste caso 16 m. Em ambos os casos a escala deve ir até o máximo valor medido ou algum

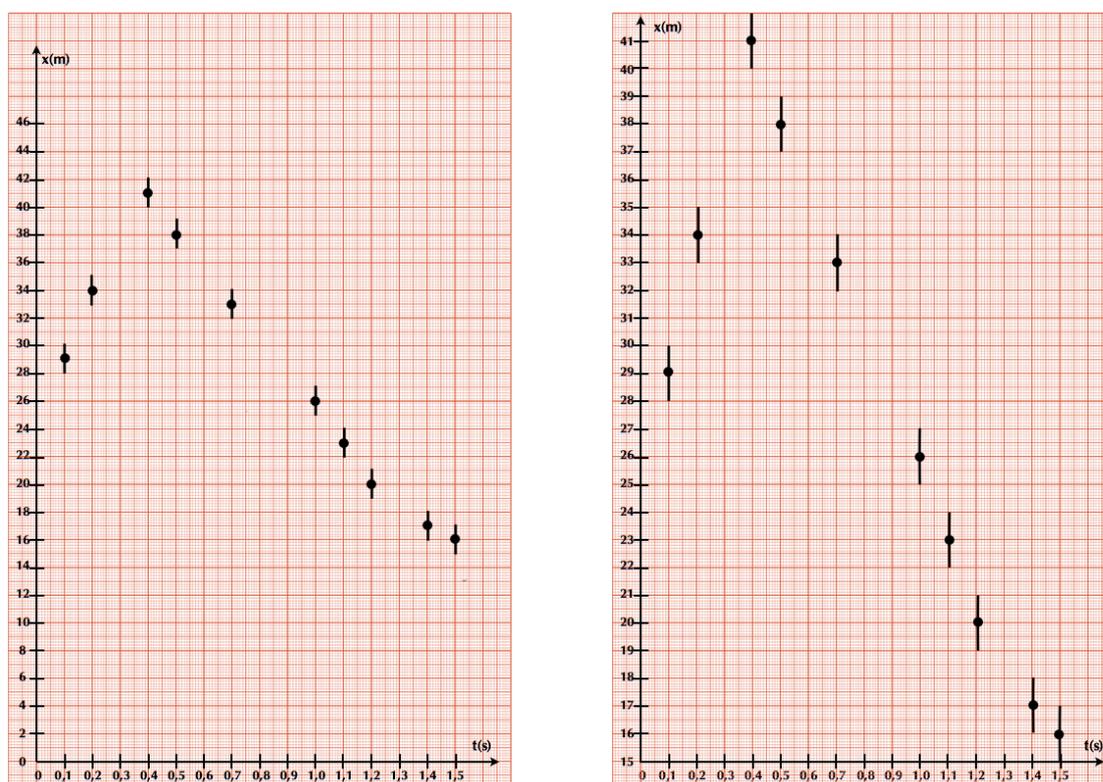


Figura 4.3: Gráfico da posição (x) em função do tempo (s) para o caso A (esquerda). Gráfico da posição (x) em função do tempo (s) para o caso B (direita).

valor superior imediato. Em geral escolhemos um valor superior que permita ajustar a escala para um múltiplo de 2 ou 5. Se consideramos o caso (A), uma escala possível seria 1 cm no papel para cada 2 m de posição (Figura 4.3 (esquerda)). Como podemos ver, não é necessário começar do zero, podemos começar por exemplo de 15 m (caso B) e escolher uma escala de 1 cm para cada 1 m (Figura 4.3 (direita)). Desta forma podemos observar melhor a estrutura própria do gráfico. Uma vez definida a escala, marcamos valores regularmente espaçados nos eixos correspondentes e identificamos os eixos com as grandezas que estes representam, com suas respectivas unidades. Finalmente, desenha-se os pontos com suas barras de erro de acordo com a tabela de dados, como pode se ver na Figura 4.3. A barra de erro é a representação gráfica da incerteza. Assim, ela deve ser desenhada como uma reta que vai de um valor igual ao valor do ponto subtraído do valor de uma incerteza até o valor do ponto somado de uma incerteza.

Não existe uma única forma de representar os nossos dados. No exemplo anterior, ambos os gráficos estão corretos. **O importante é que se deve adotar uma “escala limpa e fácil de ser lida” de modo a que não seja necessário fazer cálculos para achar a localização dos pontos no gráfico. Se você precisar fazer muitos cálculos, algo está inadequado.**

Métodos para o ajuste de uma função linear

5.1 Método gráfico com incerteza

Se medimos duas variáveis, X e Y , cuja relação sabemos que é linear, podemos encontrar uma relação analítica que melhor ajuste nossos dados. No Capítulo 4 da parte Conceitos Básicos na apostila discutimos como isto é feito analiticamente mediante o método de mínimos quadrados, mas aqui estudaremos como fazê-lo a partir do gráfico de Y em função de X , o que chamamos de **método gráfico**.

Na Figura 5.1 podemos observar a distribuição dos dados, círculos abertos, que queremos ajustar. Neste caso, para simplificar, vamos considerar que a incerteza associada a cada medida é do tamanho do ponto. Para ajustar graficamente os pontos por uma reta que melhor representa a variação de Y em função de X devemos traçar uma reta de forma tal que os pontos que se situem “acima” da reta se vejam compensados pelos pontos que se situem “abaixo” da mesma, como na linha cheia mostrada na Figura 5.1¹.

Desta forma podemos determinar o coeficiente angular (a) e linear (b) para a equação da reta $y = ax + b$. Mas mesmo no caso gráfico é preciso dar as incertezas associadas à determinação de a e b . Para isto, vamos traçar duas linhas paralelas à melhor reta (R) que ajusta os nossos dados encontrados, uma passando pelo ponto mais afastado “acima” da reta R e outra pelo ponto mais afastado “abaixo” da reta R . Caso exista um ou outro ponto excepcionalmente afastado da reta média poderá não ser considerado pois a probabilidade de corresponder a uma medida incorreta é grande. Obtendo a interseção destas retas por duas retas paralelas ao eixo- y que contêm o primeiro e último ponto experimental representado temos um “paralelogramo de incerteza” como é mostrado na figura (paralelogramo pontilhado). A partir deste, desenhamos as duas retas diagonais achando o que chamaremos a reta de máxima $y_{max} = a_{max}x + b_{max}$ e a de mínima $y_{min} = a_{min}x + b_{min}$ (ver figura).

¹Note que o uso de uma régua transparente é conveniente pois permite ter uma visão global de todos os pontos.

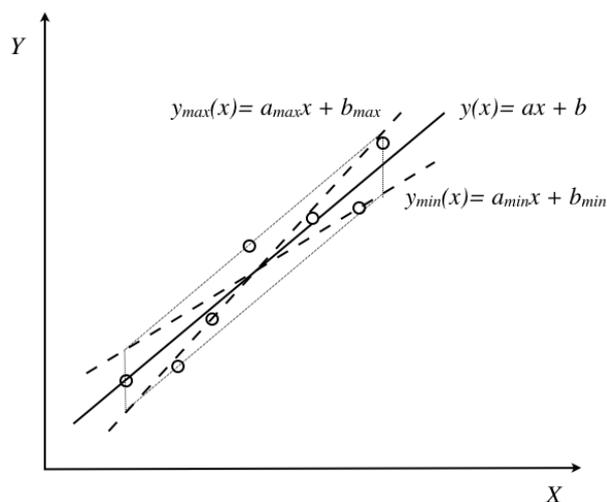


Figura 5.1: Método para ajuste linear.

A partir destas três retas, podemos então determinar as incertezas associadas para o coeficiente angular δa e linear δb como:

$$\delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2}$$

$$\delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}$$

5.2 Método dos Mínimos Quadrados

Em teoria, diversas grandezas Físicas se relacionam através de expressões matemáticas bem definidas. Por exemplo, no movimento unidimensional uniformemente acelerado, a posição $s(t)$, a velocidade $v(t)$ e a aceleração $a(t)$ de um corpo se relacionam através das fórmulas $a(t) = a(\text{cte})$, $v(t) = v_0 + at$, $s(t) = s_0 + v_0 t + at^2/2$ e $v^2(t) = v_0^2 + 2a[s(t) - s_0]$, em cada instante de tempo t , onde s_0 é a posição inicial e v_0 , a velocidade inicial do corpo. Uma das questões abordadas em Teoria dos Erros é a especificação experimental das relações das grandezas Físicas, bem como critérios para validar uma dada função específica entre as grandezas.

Considere duas grandezas físicas y e x que, em teoria, possuam uma dependência bem definida e especificada por uma fórmula matemática $y = f(x)$. Ou seja, para cada valor possível de x , a outra grandeza possui um valor determinado que vale $y(x)$. De maneira mais objetiva, consideramos que a grandeza x é dada com incerteza desprezível (ou que a incerteza dessa variável possa ser adicionada no valor da incerteza da outra variável) enquanto o valor de $y(x)$ é estimado experimentalmente com uma incerteza $\sigma(x)$. Os valores da incerteza da variável $y(x)$ podem ser diferentes entre si em função da variável x . Considere que um experimento permita calcular a seguinte tripla de valores $[x_k; y_k = y(x_k), \sigma_k = \sigma(x_k)]$, para n valores diferentes da variável x ($k = 1, 2, \dots, n$). O

índice k é utilizado para especificar uma realização específica do experimento. Vamos considerar que cada um dos k resultados experimentais é obtido com um valor diferente da variável x . Por exemplo, a variável x pode representar o tempo e o experimento consiste em uma única observação da grandeza monitorada em instantes de tempo sucessivos.

A relação matemática $y = f(x)$ que relaciona as grandezas y e x podem ser colocadas em funções de parâmetros constantes. Por exemplo, para um relação linear, a função mais geral entre y e x é dada em termos de duas constantes a_0 (coeficiente linear) e a_1 (coeficiente angular): $y(x) = a_1x + a_0$. Para uma relação quadrática, a função mais geral entre y e x é dada em termos de três constantes a_0, a_1 e a_2 , através da igualdade $y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. O ajuste de uma dada função a um conjunto de dados experimentais busca determinar os melhores valores para os parâmetros que especificam uma dada função, de acordo com algum critério de qualidade. A regressão linear, portanto, busca determinar os valores das constantes a_0 e a_1 , as quais especificam a função linear entre y e x .

Os n resultados experimentais, referentes a valores determinados da variável x , podem ser agrupados da forma

$$(x_1; y_1 \pm \sigma_1), (x_2; y_2 \pm \sigma_2), \dots, (x_k; y_k \pm \sigma_k), \dots, (x_n; y_n \pm \sigma_n) \quad (5.1)$$

Um método de ajuste de função é o Método dos Mínimos Quadrados. Em função dos dados coletados, os valores dos parâmetros que especificam uma dada relação entre y e x são determinados através da distância entre os dados experimentais e a função teórica, em unidades da incerteza da medida,

$$D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}] = \sum_{k=1}^n \frac{[y_k - f(x_k)]^2}{\sigma_k^2}. \quad (5.2)$$

A distância $D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}]$ é função de todos os dados do experimento e também de todas as constantes que definem a função $f(x)$. A regressão linear se aplica para funções lineares e é definida pela determinação das duas constantes que definem a reta ($f(x) = a_1x + a_0$). A distância $D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}]$ é uma função quadrática dos parâmetros que definem a função $f(x)$.

Os parâmetros da função que se ajustam aos dados experimentais são os valores para os quais minimiza o valor de $D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}]$. A distância $D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}]$ é uma quantidade sem unidades físicas. De forma geral, o Método dos Mínimos Quadrados, utiliza todos os dados experimentais e os pontos mais relevantes são os de menor incerteza. A divisão pela incerteza σ_k de cada resultado experimental permite que pontos mais incertos (ruidosos) estejam mais afastados do melhor ajuste (o que é de se esperar para pontos de grande incerteza) e os pontos mais precisos, mais próximos da curva ajustada.

O ajuste linear pelo Método de pode ser feito analiticamente em função dos dados experimentais. Para um conjunto de n resultados experimentais, escritos da forma $(x_k; y_k \pm \sigma_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) os dois parâmetros que devem ser determinados são a_1 e a_0 . Em função

desses dois parâmetros, a distância $D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}]$ se escreve

$$D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}] = \sum_{k=1}^n \frac{[y_k - (a_1 x_k + a_0)]^2}{\sigma_k^2}, \quad (5.3)$$

a qual pode ser escrita em função de seis termos

$$\begin{aligned} D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}] &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{\sigma_k^2} \right) - 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{\sigma_k^2} \right) a_1 - 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{\sigma_k^2} \right) a_0 \\ &+ 2 \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sigma_k^2} \right) a_1 a_0 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \right) a_1^2 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2} \right) a_0^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Os seis termos entre parênteses são determinados pelos dados experimentais e a função anterior permite determinar os valores de a_1 e a_0 . Os valores de a_1 e a_0 que minimizam a expressão anterior representam o melhor ajuste, segundo o Método dos Mínimos Quadrados. A minimização de $D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}]$ em função a_1 e a_0 pode ser feita de maneira usual (o procedimento é similar com o de encontrar o ponto que minimiza uma parábola de concavidade positiva) e esses valores são dados por

$$a_1 = \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{\sigma_k^2} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{\sigma_k^2} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sigma_k^2} \right)}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sigma_k^2} \right)^2}, \quad (5.5)$$

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{y_k}{\sigma_k^2} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{\sigma_k^2} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sigma_k^2} \right)}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sigma_k^2} \right)^2}. \quad (5.6)$$

Apesar de uma aparência complexa, os valores de a_1 e a_0 podem ser determinados em função daqueles termos entre os parênteses, os quais envolvem uma única soma com todos os valores encontrados no experimento. Para facilitar os cálculos, cada soma pode ser

realizada de forma independente. Para facilitar a notação, definimos

$$S_\sigma = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2}, \quad (5.7)$$

$$S_x = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sigma_k^2}, \quad (5.8)$$

$$S_y = \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{\sigma_k^2}, \quad (5.9)$$

$$S_{xy} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{\sigma_k^2}, \quad (5.10)$$

$$S_{xx} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\sigma_k^2}, \quad (5.11)$$

$$\Delta = S_\sigma S_{xx} - S_x^2, \quad (5.12)$$

de tal forma que os parâmetros do melhor ajuste se escrevem

$$a_1 = \frac{S_\sigma S_{xy} - S_x S_y}{\Delta}, \quad (5.13)$$

$$a_0 = \frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{\Delta}. \quad (5.14)$$

Portanto, o melhor ajuste é uma função dos dados experimentais $\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}$ e essa dependência é linear com a variável ruidosa $y_k \pm \sigma_k$. De fato, as fórmulas de a_1 e a_0 mostram que os valores de y_k aparecem apenas no numerador da fração, e sempre de forma linear.

As incertezas dos parâmetros a_1 e a_0 podem ser encontradas via propagação de incerteza. Por exemplo, a contribuição da variável ruidosa y_k para as incertezas de cada um dos parâmetros a_1 e a_0 é dada por

$$\delta a_{1y_k} = \frac{1}{\Delta} \left| \frac{S_\sigma x_k - S_x}{\sigma_k} \right|, \quad (5.15)$$

$$\delta a_{0y_k} = \frac{1}{\Delta} \left| \frac{S_{xx} - x_k S_x}{\sigma_k} \right|. \quad (5.16)$$

Logo, as incertezas desses parâmetros são (após algumas simplificações)

$$\delta a_1 = \sqrt{(\delta a_{1y_1})^2 + (\delta a_{1y_2})^2 + \cdots + (\delta a_{1y_n})^2} = \sqrt{\frac{S_\sigma}{\Delta}}, \quad (5.17)$$

$$\delta a_0 = \sqrt{(\delta a_{0y_1})^2 + (\delta a_{0y_2})^2 + \cdots + (\delta a_{0y_n})^2} = \sqrt{\frac{S_{xx}}{\Delta}}. \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

Os coeficientes da reta que melhor se ajustam aos dados experimentais podem ser encontrados pelas expressões

$$a_1 = \left(\frac{S_\sigma S_{xy} - S_x S_y}{\Delta} \right) \pm \sqrt{\frac{S_\sigma}{\Delta}}, \quad (5.20)$$

$$a_0 = \left(\frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{\Delta} \right) \pm \sqrt{\frac{S_{xx}}{\Delta}}. \quad (5.21)$$

nas quais as incertezas são dadas com apenas um algarismo significativo.

As fórmulas anteriores sempre permitem encontrar os coeficientes dessa melhor reta (desde que $\Delta \neq 0$), independente de a grandeza y possuir uma dependência linear como função de x . Portanto, é necessário realizar uma análise de qualidade do ajuste. Nos casos em que exista uma dependência linear entre y e x , a relação entre essas duas grandezas pode ser dada por $y(x) = a_{1\text{ver}}x + a_{0\text{ver}} + \delta y(x)$, onde $a_{1\text{ver}}$, $a_{0\text{ver}}$ e $\delta y(x)$ são os valores verdadeiros dos coeficientes angular e linear e do erro (devido a algum processo ruidoso). Para os modelos de ruídos simétricos em torno do valor nulo, o valor médio para cada valor de y resulta $\overline{y(x)} = a_{1\text{ver}}x + a_{0\text{ver}}$.

Em média, as estimativas para os coeficientes angular e linear da reta podem ser calculadas e comparadas com os valores verdadeiros dos coeficientes da reta desconhecida. Uma vez que as médias das somas que contém as variáveis y são dadas por $\overline{S_{xy}} = a_{1\text{ver}}S_{xx} + a_{0\text{ver}}S_x$ e

$$\overline{S_y} = \sum_{k=1}^n \frac{\overline{y}_k}{\sigma_k^2} = a_{1\text{ver}} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sigma_k^2} + a_{0\text{ver}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k^2} = a_{1\text{ver}}S_x + a_{0\text{ver}}S_\sigma, \quad (5.22)$$

$$\overline{S_{xy}} = \sum_{k=1}^n \frac{\overline{y}_k x_k}{\sigma_k^2} = a_{1\text{ver}} \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} + a_{0\text{ver}} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sigma_k^2} = a_{1\text{ver}}S_{xx} + a_{0\text{ver}}S_x, \quad (5.23)$$

os valores médios dos coeficientes encontrados pelo Método dos Mínimos Quadrados valem

$$\overline{a_1} = \frac{S_\sigma (a_{1\text{ver}}S_{xx} + a_{0\text{ver}}S_x) - S_x (a_{1\text{ver}}S_x + a_{0\text{ver}}S_\sigma)}{\Delta} = a_{1\text{ver}}, \quad (5.24)$$

$$\overline{a_0} = \frac{S_{xx} (a_{1\text{ver}}S_x + a_{0\text{ver}}S_\sigma) - S_x (a_{1\text{ver}}S_{xx} + a_{0\text{ver}}S_x)}{\Delta} = a_{0\text{ver}}. \quad (5.25)$$

Ou seja, as estimativas fornecem os valores corretos em média. Quando a relação entre as duas grandezas y e x for linear, com um ruído nulo em média, o Método dos Mínimos Quadrados fornece estimativas consistentes com os valores a serem determinados.

5.3 Teste de compatibilidade por χ^2

Porém, mesmo para relações não lineares entre y e x , é possível determinar a melhor reta que se ajusta aos dados. É possível fazer uma análise da qualidade do ajuste em função do valor do menor valor da distância $D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}]$, em função dos parâmetros livres que descrevem uma dada relação entre y e x . Definimos a função chi-quadrado (χ^2) da amostra de dados pelo valor mínimo de $D[\{x_k\}, \{y_k\}, \{\sigma_k\}]$:

$$\chi^2 = \text{Min} \sum_{k=1}^n \frac{[y_k - f(x_k)]^2}{\sigma_k^2}. \quad (5.26)$$

Ou seja, definimos χ^2 em termos dos valores encontrados via o Método dos Mínimos Quadrados. Com as expressões anteriores, é possível simplificar o valor do χ^2 e escrevê-lo apenas em função dos dados do experimento. Por simplicidade, essa expressão será omitida para o caso linear. O χ^2 da amostra de dados é também uma grandeza aleatória, uma vez que depende dos valores de y . O valor médio dessa grandeza dá o valor (sem unidades físicas) $\bar{\chi}^2 = n - p$, na qual n é o número de pontos obtidos no experimento e p é a quantidade de parâmetros livres usado para o ajuste da função. No caso linear, $p = 2$ pois existem apenas dois parâmetros livres. O valor médio do chi-quadrado para a regressão linear é dado, portanto, por $\bar{\chi}^2 = n - 2$. Esse é o valor esperado para um experimento com n medidas.

Por causa das flutuações e incertezas estatísticas, em uma dada realização experimental, o valor encontrado do χ^2 é diferente do valor médio. Através da distribuição de probabilidade para o χ^2 , pode-se determinar um intervalo de 98% de confiança com os possíveis valores para o χ^2 . Esse intervalo não é simétrico em relação ao valor médio e pode ser determinado com o auxílio de algumas tabelas, em função do número de dados e da quantidade de parâmetros livres do modelo. Por exemplo, com $n = 10$ dados experimentais, se a relação entre y e x for linear ($n - p = 10 - 2 = 8$), o valor calculado do χ^2 deve ficar compreendido entre $0,21 < (\chi^2/8) < 2,51$ com uma margem de confiança de 98%. Outros dois exemplos, se a quantidade de dados experimentais coletados for de $n = 50$ ($n - p = 50 - 2 = 48$), o intervalo de confiança fica $0,59 < (\chi^2/48) < 1,54$ enquanto para $n = 100$ ($n - p = 100 - 2 = 98$), o intervalo é dado por $0,70 < (\chi^2/98) < 1,36$, ambos os exemplos possuem uma margem de confiança de 98%.

O intervalo de confiança possui um valor mínimo e outro valor máximo. Se uma função possui muitos parâmetros livres, esses parâmetros ajustados podem diminuir o valor do χ^2 quando os dados forem descritos por uma função menos complexa (com uma quantidade menor de parâmetros livres ajustáveis). Por exemplo, com n dados experimentais, existe um polinômio de grau $n - 1$ capaz de descrever completamente os valores observados sem nenhuma incerteza (todos os dados se encaixam perfeitamente na curva do polinômio). Em uma situação com incertezas e erros instrumentais, o valor do χ^2 nulo ou muito pequeno não é compatível com os dados do experimento. Por outro lado, se a função utilizada não possui a complexidade necessária para descrever a relação existente entre y e x , mesmo com o ajuste dos parâmetros livres da função, existirá um erro apreciável. Esses erros tornam o valor do χ^2 grande, uma vez que diversos pontos experimentais estarão

distantes da curva, em várias ordens de grandeza em relação à incerteza de cada medida.

Determinação da velocidade instantânea

No movimento uniformemente acelerado a velocidade da partícula em um instante t pode ser calculada a partir da velocidade média calculada entre os instantes $t + \Delta t$ e $t - \Delta t$ com Δt constante. Isto é:

$$\langle v(t) \rangle = \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (6.1)$$

Assim, para um conjunto de medições de posição em função do tempo, podemos calcular a velocidade em cada ponto (i) a partir das medições de tempo e posição do ponto posterior (t_{i+1} e x_{i+1}) e anterior (t_{i-1} e x_{i-1}), utilizando a fórmula:

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (6.2)$$

Para cada valor de velocidade também podemos calcular a incerteza associada mediante a fórmula de propagação de incertezas. Desprezando a incerteza na determinação do tempo, obtemos:

$$\delta_{v_i}^2 = \frac{\delta_{x_{i+1}}^2 + \delta_{x_{i-1}}^2}{(t_{i+1} - t_{i-1})^2} \quad (6.3)$$

onde $\delta_{x_{i+1}}$ e $\delta_{x_{i-1}}$ são as incertezas na determinação da posição x_{i+1} e x_{i-1} respectivamente.

Distribuição Gaussiana

Valor médio, Desvio Padrão e Densidade de Probabilidade

Sejam N medições aleatórias independentes de uma grandeza qualquer, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Como alguns dos valores x_i medidos podem ser repetidos, podemos dizer que para esta grandeza temos M **eventos** possíveis de medida tal que $M \leq N$ e eles são: y_1, y_2, \dots, y_M . Então, podemos definir a **frequência de ocorrência** do evento y_i como $N(y_i)$ de forma tal que:

$$\sum_{i=1}^M N(y_i) = N. \quad (7.1)$$

Desta forma, podemos definir a **frequência relativa** como a fração de eventos y_i em relação ao número total de eventos N , dada por:

$$F(y_i) = \frac{N(y_i)}{N}, \quad (7.2)$$

de forma que (mostrar):

$$\sum_{i=1}^M F(y_i) = 1. \quad (7.3)$$

Se o processo é repetido indefinidamente, ou seja, $N \rightarrow \infty$, a frequência relativa é interpretada como a **probabilidade de ocorrência** do evento y_i :

$$P(y_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(y_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(y_i)}{N}, \quad (7.4)$$

e como sabemos que $0 \leq N(y_i) \leq N$, então $0 \leq P(y_i) \leq 1$.

No Capítulo 2 da parte Conceitos Básicos definimos os conceitos de valor médio e desvio padrão. Agora podemos re-escrever estas definições em função da frequência relativa, obtendo:

1. Valor médio

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^M F(x_i)x_i, \quad (7.5)$$

2. Variância $V[x] = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2 F(x_i) \quad (7.6)$$

Quando realizamos observações experimentais utilizamos instrumentos que determinam os valores de grandezas que são continuamente distribuídas. Os resultados são truncados até o limite da precisão de medida do instrumento utilizado. Por exemplo, um cronômetro usual mede intervalos de tempo com precisão de um centésimo de segundo. Isto significa que intervalos de tempo menores que este valor não podem ser medidos com este instrumento. Assim, os resultados obtidos serão representados por um número finito de valores, mesmo que a variável observada seja contínua. Algumas vezes, o número de valores possíveis medidos, mesmo que finito, pode ser muito grande, e para estes casos é conveniente agrupa-los em intervalos. Desta forma o conjunto de medidas diferentes fica reduzido sem que a informação da amostra original seja perdida.

Consideremos novamente N medições aleatórias independentes de uma grandeza qualquer, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Para estes casos, definimos como o mesmo evento todo resultado da realização do processo aleatório y que caia num intervalo de valores Δy , de forma que o evento agora será caracterizado por $\{y_i, \Delta y\}$:

$$y_i - \frac{\Delta y}{2} \leq x_j < y_i + \frac{\Delta y}{2}. \quad (7.7)$$

A probabilidade de ocorrência do evento $\{y_i, \Delta y\}$ é definida por:

$$P(y_i) = \Delta P_i \quad (7.8)$$

onde ΔP_i é a probabilidade de encontrarmos como resultado da realização do processo aleatório, valores no intervalo $\{y_i - \frac{\Delta y}{2}, y_i + \frac{\Delta y}{2}\}$. Para intervalos Δy pequenos, podemos escrever a seguinte relação:

$$P(y_i) = \Delta P_i = p(y_i)\Delta y \quad (7.9)$$

onde $p(y_i)$ é denominada de densidade de probabilidade do evento aleatório y_i . E se $\Delta y \rightarrow 0$, então ΔP_i e Δy são infinitesimais podendo escrever a densidade de probabilidade como:

$$p(y) = \frac{dP}{dy} \quad (7.10)$$

sendo que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(y) dy = 1 \quad (7.11)$$

Em N repetições de um processo aleatório real, a aproximação experimental para a proba-

bilidade de realização de um evento é a frequência relativa $F(y_i)$, definida na equação 7.2. Assim, a densidade de probabilidade experimental $p_{exp}(y_i)$ de ocorrência do evento $\{y_i, \Delta y\}$ é dada por:

$$p_{exp}(y_i) = \frac{F(y_i)}{\Delta y}. \quad (7.12)$$

Para o caso contínuo e utilizando o conceito de densidade de probabilidade, o valor médio (μ) e a variância (σ^2) podem ser escritos da seguinte forma:

1. **Valor médio**

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} y p(y) dy. \quad (7.13)$$

2. **Variância** $V[y] = \sigma^2$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu)^2 p(y) dy. \quad (7.14)$$

Função de Laplace-Gauss

Em muitas situações experimentais utilizamos **distribuições Gaussianas** para interpretar nossos resultados físicos, em parte porque os fundamentos teóricos das medições realizadas se correspondem com distribuições Gaussianas ou porque a experiência tem nos mostrado que a estatística de Gauss nos proporciona uma descrição razoavelmente acurada dos vários eventos reais. Na distribuição Gaussiana, a densidade de probabilidade é dada por:

$$p(x) = G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (7.15)$$

onde μ é o valor médio e σ o desvio padrão da distribuição, dados pelas equações discutidas anteriormente.

Na Figura 7.1 apresentamos a função Gaussiana de densidade de probabilidade para a variável contínua x . Esta função é também chamada de função de Laplace-Gauss ou função Normal. O gráfico da função Gaussiana é uma curva simétrica em forma de “sino” com uma altura máxima dada por $G_{max} = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$. Pode ser mostrado a partir da equação 7.15 que σ é a meia largura da curva na altura correspondente a $\sim 0,61G_{max}$ e que a área sob a curva entre $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ (região pintada na Figura 7.1) corresponde a 68,3% da área total. Isto quer dizer que a probabilidade de medirmos um valor no intervalo $\mu \pm \sigma$ é 68,3%. Seguindo o mesmo procedimento, podemos mostrar que a probabilidade de encontrarmos um valor no intervalo $\mu \pm 2\sigma$ é 95,4% e no intervalo $\mu \pm 3\sigma$ é 99,7%.

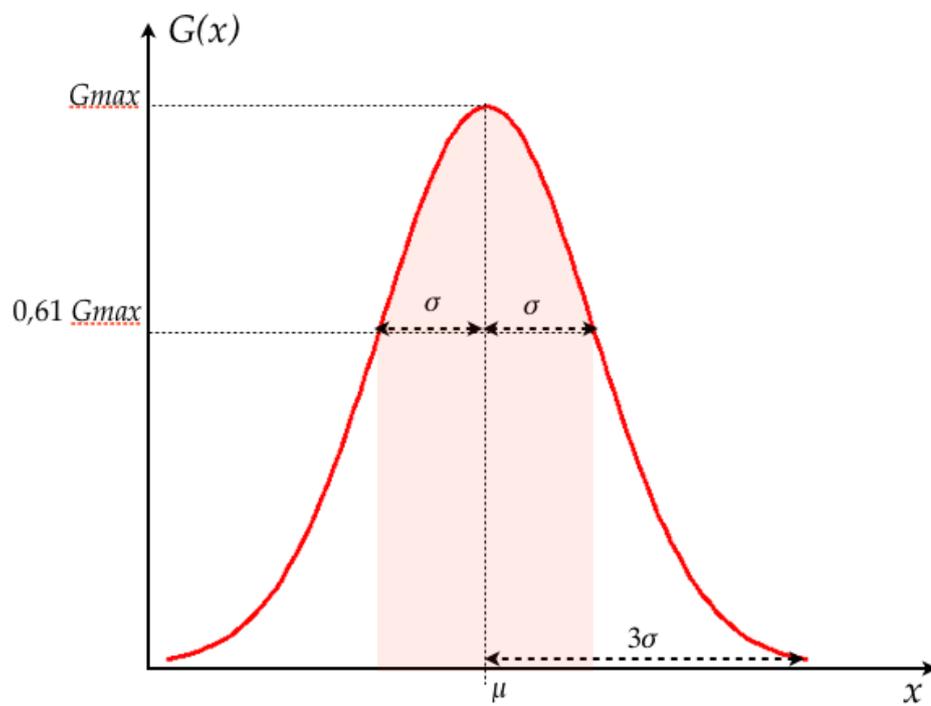


Figura 7.1: Representação da função Gaussiana.